Outils de résolution pour la maximisation convexe

Approximation interne et externe

G. Guérard   I. Tseveendorj

Explication des algorithmes, Mars 2014

Outline

1. Problématique
   - Le problème étudié
   - Méthodes utilisées
2. Approximation du domaine
   - Résultats préliminaire
   - Techniques d'approximation
3. Algorithmes et conditions d'optimalité
   - Algorithme d'approximation interne
   - Algorithme d'approximation externe
   - Conditions d'optimalité

Le problème étudié

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \quad \|x\|^2, \\ \text{subject to } x \in D \; \textit{where D is full dimensional} \end{array} \right. \qquad (NM)$$

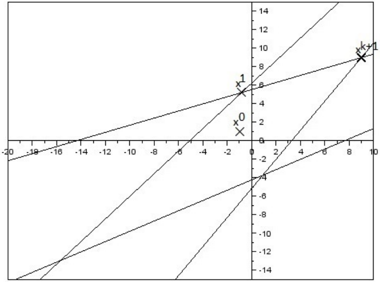
Problème de maximisation convexe :

1. fonction objective concave
2. contraintes convexes formant un polyhèdre

Problématique : comment obtenir le maximum global ? comment éviter de rester dans une région lcoale ?

Recherche local

- **Recherche local à partir d'un point x du domaine**
  - $x^{k+1} = argmax\{< \nabla f(x^k), x >| \ x \in D\}$.
  - si deux itérations consécutives trouvent le même point alors fin de la procédure.

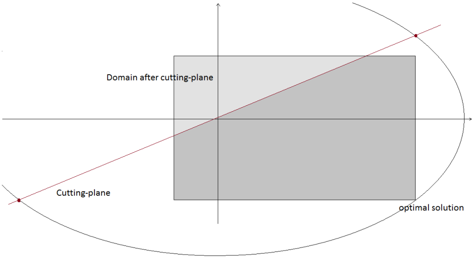


$$
\begin{cases}
max & x_1^2 + x_2^2 \\
s.t. & -5x_1 + 13x_2 \leq 72 \\
 & 11x_1 - 7x_2 \leq 36 \\
 & 5x_1 - 9x_2 \leq 28 \\
 & -11x_1 + 9x_2 \leq 56
\end{cases}
\qquad (P6)
$$

Coupe standard

Soit y un maximum local du domaine de définition :

1. Définir les n arêtes en y.
2. Trouver les points $y^1, y^2, \ldots, y^n$ d'intersection entre les arêtes et la courbe de niveau $\{x \mid f(x) = f(y)\}$.
3. Former l'hyper-plan$\{x \mid \langle c, x \rangle = \gamma\}$ passant par ces points.



Maximum d'une sphère

$$\begin{cases} \text{maximize} & \|x\|^2, \\ \text{subject to} & \|x-w\|^2 \le r^2 \end{cases} \quad (SNM)$$

Solution du problème :

1. Considérons le triangle formé par un point θ de la Sphère, l'origine et le centre de la sphère. Maximiser $\|x\|^2$ équivaut à maximiser le côté origine-θ .
2. Solution optimal si le côté est la somme des deux autres côtés.
3. La solution optimale est u avec pour coordonnées $u = \left(1 + \sqrt{\frac{r^2}{\|w\|^2}}\right) * w$.

Maximum d'une boite

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & \|x\|^2, \\ \text{subject to} & L_i \leq x_i \leq U_i, i = 1, \ldots, n \end{array} \right. \quad (BNM)$$

Solution du problème :

- Chaque contrainte est indépendante.
- La solution optimale est v avec pour coordonnées $v = \left(\; max\{\mid L_i \mid, \mid U_i \mid\} \; \right), \; i = 1 \; to \; n.$

Plus grande sphère interne

Comment trouver le rayon :

1. Soit $\delta(x)$, $x \in D$, le rayon de la plus grande sphère interne de D avec x pour centre.
2. Soit r_i la distance à la contrainte i, $\delta(x) = min\{r_i(x) : i = 1 \to m\}$.
3. Par projection orthogonale, $r_i(x) = \frac{-\langle a^i, x\rangle + b_i}{\|a^i\|^2}$.
4. Contraintes normalisées : $\delta(x) = min\{-\langle a^i, x\rangle + b_i : i = 1 \to m\}$.

Plus grande sphère interne

Comment trouver le centre :

1. La plus grande sphère de centre s est $S(s, \delta(s)) = \{y : \| x - s \| \leq \delta(s)\}$.
2. Maximiser $\delta(x) = min\{r_i(x)\, i = 1 \ to \ m\}$ sous le contrainte de (NM).
3. Soit $\delta(x) \leq -\langle a^i, x \rangle + b_i \ : \ i = 1 \ to \ m$.
4. $$\begin{cases} \text{maximize} \ \ \delta, \\ \text{subject to } \delta \leq -\langle a^i, x \rangle + b_i \ : \ i = 1 \rightarrow m \end{cases}$$
5. Equivalent à
$$\begin{cases} \text{- minimize} \ \ -x^{n+1}, \\ \text{subject to } \langle a^i, x \rangle + x^{n+1} \leq b_i \ : \ i = 1 \rightarrow m \end{cases} \quad (SLP)$$

Boite contenant le domaine

Définition de la boite :

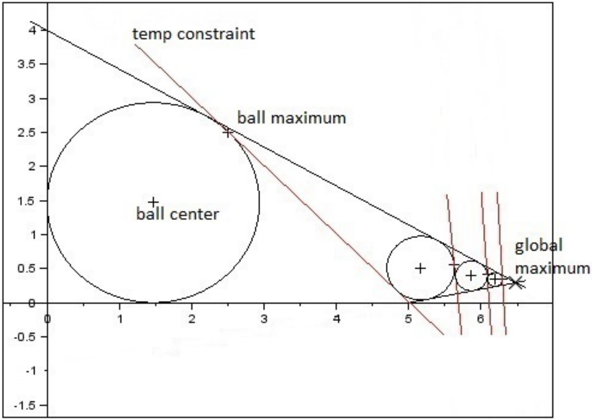
1. $I = \begin{pmatrix} e^1 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix}$ avec $e^i = (O, \dots, 1, \dots, 0)^T$
2. Lower bounds : $L_i = argmin \left\{ \left\langle e^i, x \right\rangle \, : \, Ax \leq b \right\}$
3. Upper bounds : $U_i = argmax \left\{ \left\langle e^i, x \right\rangle \, : \, Ax \leq b \right\}$
4. Problème similaire à (BNM).

Algorithme

Algorithm 1: Inner approximation: IA

Data: $Ax \leq b$
Result: Global optimum of (NM)
Initialization : Let $r_{min} = \epsilon$ and $condition = 0$;
while $condition = 0$ **do**
    while $r > r_{min}$ **do**
        Resolve (SLP);
        Find u the global optimum of (SNM);
        Add a temporary constraint to (NM): $\langle w, x \rangle \geq \|w\|^2 + r^2$;
    end
    Remove temporary constraints;
    Do a local research starting at u;
    if *global optimality conditions* $=$ *true* **then**
        $condition = 1$
    else
        Do a cutting plane at the local optimum;
    end
end

Example



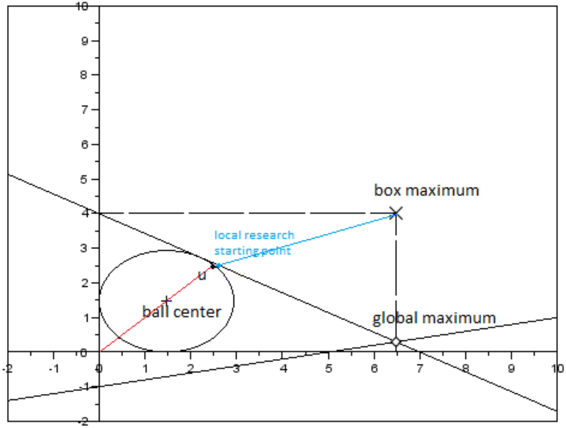
IA algorithm

Algorithme

Algorithm 2: Inner and outer approximation: IAO

Data: $Ax \leq b$
Result: Global optimum of (NM)
Initialization : Let $r_{min} = \epsilon$ and *condition* $= 0$;
while *condition* $= 0$ **do**
  Step 1. Resolve (SLP);
  Find u the global optimum of (SNM);
  Step 2. Create an outer box;
  Find v the global optimum (BNM);
  Step 3. Find α the intersection between $[uv]$ and D's borders;
  Local research starting from α;
  Step 4.
  if *global optimality conditions* $=$ *true* **then**
    condition $= 1$
  else
    Do a cutting plane at the local optimum;
  end
end

Exemple



IAO algorithm

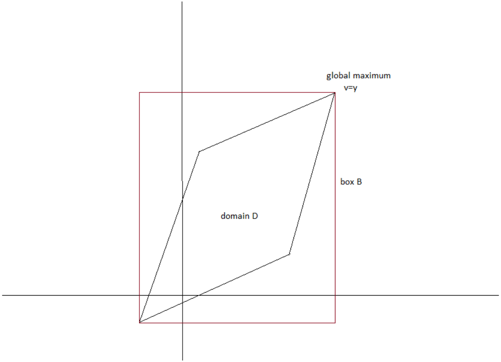
Vérification supplémentaire

1. Vérification des contraintes :
    1. Elimination des doublons
    2. Elimination des contraintes hors domaine
    3. Elimination si un seul point appartient au domaine
2. Vérification du full dimensional.

Solution évidente

Nous avons l'inclusion suivantes:

1. Soient la solution y over D et u sur la boite$B$, $D \subset B$
2. $f(v) \geq f(x)$, $x \in D$, donc si $v = y$, alors y est l'optimum global.



Domaine vide

Les coupes réduisent le domaine jusqu'à ce qu'il soit vide :

1. Soit $\langle c, x\rangle = \gamma$ l'équation de la coupe, la nouvelle contrainte est $\langle c, x\rangle \geq \gamma$ et soit $\mathscr{L}_f(\alpha)$ le Lesbesgue set de f en α, $\mathscr{L}_f(\alpha) = \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$.
2. Si me domaine est vide, $\{x \in D \mid \langle c, x\rangle > \gamma\} = \emptyset$, alors $\forall x \in D, \langle c, x\rangle < \gamma$. La solution y est un maximum global sur le domaine $D \subset \mathscr{L}_f(f(y))$.